35. Universal k^{-d}-spectra of quasi-random objects

山口大・教育　古　川　　浩

いわゆる〝ノイズ〞とは白色雑音を意味し，ノイズを作っている物理量Aのパワースペクトル

$$S_\omega \equiv < | A_\omega |^2 >$$

が frequency ω によらない：

$$S_\omega \propto \omega^0 \ 。 \tag{1}$$

しかし振動数 ω が十分大きいものに対してはパワースペクトルは一般に ω^{-2} に比例する：

$$S_\omega \propto \omega^{-2} 。 \tag{2}$$

これは通常ミクロな力学の可逆性をあらわしていると解釈される。(1) と (2) を結ぶものとして通常 Lorentz 形スペクトル：

$$S_\omega \propto \frac{1}{\omega_0^2 + \omega^2} \tag{3}$$

がよく使われる。(1) − (3) のスペクトルは比較的我々の感覚にうけ入れ易い。一方，いわゆる $1/f$ ノイズと呼ばれる一群のノイズスペクトルは現在まですっきりとした説明がされていない。ここではノイズを空間のパターンに置き換え，$1/f$ 的な特異性の出所を考察する。 以後，frequency f（又は $\omega = 2\pi f$）のかわりに波数 k を使うことにする。

パワースペクトルの逆 fourier 変換は相関関数であるが $1/k$ のようなスペクトルを持つ相関はどのように作り出すことが出来るだろうか。均一な剛体の任意の２点は相関１である。この剛体の形を（自己相似的に）少しくずしてみよう。このとき剛体の任意の２点はまだほとんど相関１である。すなわち相関関数 $G(r) \sim r^0$ 。したがってパワースペクトル S_k は

$$S_k = \int G(r) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d\vec{r} \simeq \int r^0 \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d\vec{r} \approx k^{-d} \ . \tag{4}$$

これは次元 $d = 1$ で $1/f$ スペクトルに相当する。 k^{-d} は単に体積積分を表わす。この無意味とも思える考察は大変教訓的である。通常統計力学の平均は長時間平均であり，系が十分〝かきまぜられている〞ことを前提とする。それ故 $G(r) \sim r^0$ の状態はかきまぜすなわち Mixing

のまったく起っていない状態であり，それ故 off-equilibrium である。

以上のことを簡単なモデルによって考える[1,2] d 次元立方体を次々に（1度に 2^d コの）長方体に分割することを考える。このとき2通りの場合が考えられる。

ⅰ）かけらはかきまぜられない。

ⅱ）かけらはかきまぜられる。

あきらかにⅱ）の場合，かけらの重心間の相関は short range である。ⅰ）の場合，かけらの重心の相関は

$$G(r) \approx \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-c}, \quad c = \log_2 \left\langle \left(\frac{v}{\overline{v}}\right)^2 \right\rangle, \tag{5}$$

と計算される[2]。ここで v は1度の分割で作られる 2^d コのかけらの体積を表わし，$\overline{v}$ はその平均である。v は多くの分割をくりかえしたのちのものではないことに注意。それ故分割があまりでたらめでない場合は $v \simeq \overline{v}$ と置けて

$$G(r) \propto r^{-0}, \quad S_k \propto k^{-d}$$

が得られる。k^{-d} スペクトルは(5)からも分るようにかなり巾広く有効である。

筆者は Musha 達[3] と類似の方法によって，多くの物体のパターンについてスペクトルを調べ，開方的なパターン（すなわち広がりを連想させるような）のスペクトルが k^{-d} であることを確かめた。この感覚は長きより相関からくるものと思われる。図1に台風のまわりの雲のパターンと，そのスペクトル（流れ方向の1次元スペクトル）を示した。これはいろいろな意味で興味深い。これを絵画とみれば人間によって創作されるものが k^{-1} スペクトルを持つことを意味し，又そのまま物質の流れと考えれば k^{-1} スペクトルは近似的に同一点における $1/f$ スペクトルとすることが出来る。

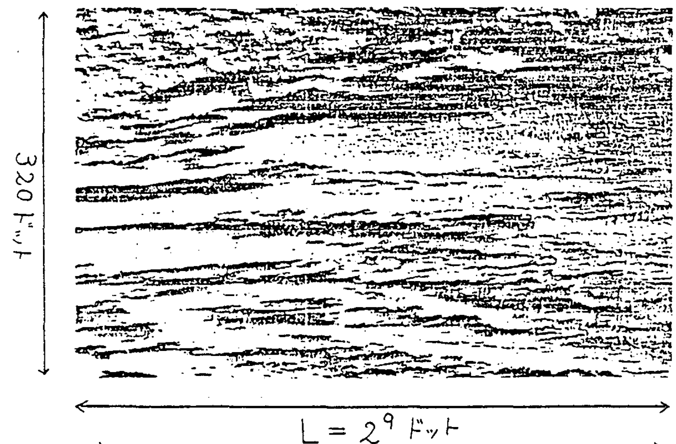
おわりに，k^{-d} スペクトルは物理現象に多く観測されるはずである。エルゴード性と相対する概念であり，off-equilibrium の統計現象として興味ある研究対象である。

文　献

1) H. Furukawa, Prog. Theor. Phys. **75**, 195 (1986).

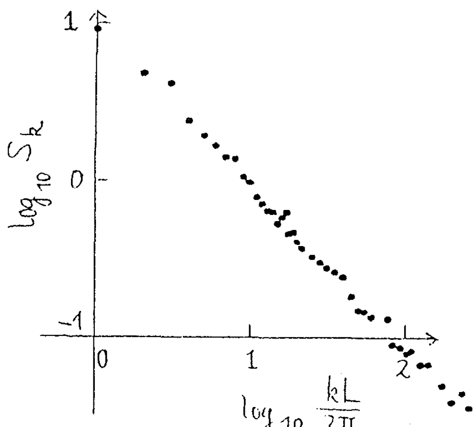
2) H. Furukawa, to be published in Phys. Rev. **A**.

3) 武者利光，ゆらぎの世界，講談社（ブルーバックス）。



台風のまわりの雲の様子(リーダーズダイジェスト)

Fig. 1 a



流れ方向(横方向)の1次元スペクトル
(320列の平均)

Fig. 1 b